Hermann KAUTSCHITSCH, Klagenfurt

Experimenteller Geometrieunterricht an der SI mit "FELIX"

1. Was kann ein Computer und insbesondere das von G. Kadunz am Institut für Mathematik in Klagenfurt entwickelte Grafikpaket "FELIX" mehr als herkömmliche Medien bzw. Programme?

   (a) FELIX ist, wie die anderen Grafikpakete auch, ein schneller und genauer **Rechen- und Zeichenknecht**, mit dem die üblichen Konstruktionen in der Ebene, wovon einige schon vorgefertigt sind, durchgeführt werden können.

   (b) Geometrische Objekte bzw. Teile von Konstruktionen können aus ihrem **konstruktiven Verband gelöst**, aber auch wieder **eingehängt** und beliebig, sowohl interaktiv als auch automatisch, **über** den Bildschirm bewegt werden.

   (c) Geometrische Größen (Strecken, Flächem Winkel) können durch Anklicken gemessen und in einem **Taschenrechnermodus** weiterverarbeitet werden, wobei auch mit Zwischenergebnissen weitergerechnet werden kann. Bei kontinuierlichen Bewegungen werden die Messungen und Berechnungen **laufend aktualisiert**, bis zu 7 Ergebnisse können in einem Meßfenster **simultan beobachtet** werden.

   (d) Geometrische Objekte können **beschriftet** werden, die Symbole wandern bei Bewegungen mit.

   (e) **Zoomen** gestattet genauere, **Bildschirmteilungen** simultane Beobachtungen. **Verschiedene Farben** dienen als Aufmerksamkeitslenkungen.

   (f) **Ortslinien- und Malmodus** gestatten ein Beobachten von Veränderungen (Festhalten der Vergangenheit).

   Damit: FELIX simuliert eine **Bleistift-Lineal-Zirkel-Geodreieck-Welt**, die wegen der Loslösungsmöglichkeiten mit einer **Papier-Schere-Welt** bzw. wegen der Taschenrechnerfunktionen mit einer **Meß- und Rechenwelt** verbunden werden kann, die im Gegensatz zu anderen Medien

   - kontinuierlich veränderbar,
   - leicht verwert- und verbesserbar,
   - beliebig oft wiederholbar

   ist. Automatische Abläufe ermöglichen ein "Distanzieren vom Handeln" und ein Beobachten von Grenzlagen, "günstigen" Lagen und Hilfslinien, an die man so in der Vorstellung nicht gedacht hat.

2. FELIX gestattet eine experimentelle Unterrichtsform in der Geometrie. Die oben genannten Möglichkeiten, vor allem die leichte Verwerfbarkeit von nicht zielführenden Strategien und die relativ schnelle Durchführbarkeit neuer Ideen animieren zu einer experimentellen Unterrichtsform, in der die Tätigkeit eines Naturwissenschaftlers simuliert wird:

   (a) Nicht nur zufälliges, sondern auch ein gezieltes Konstruieren von Konfigurationen, die einen Beitrag zur Fragestellung leisten.

   (b) Sammeln von Beobachtungen und Daten: Erste Vermutungen entstehen durch "Schauen" und geometrisches Vorwissen.

   (c) Abänderung einzelner Bedingungen, um besere oder überhaupt Informatioen zu erhalten (auch nach der Trial- und Errormethode), Aufstellen von Tabellen beobachteter Größen: Gerade der Computer animiert zu Abänderungen, weil hinter den Aktivitäten kein großer handwerklicher und zeitlicher Aufwand steckt und liefert bequem dazugehörge Tabellen.

   (d) Prüfung der Auswirkungen der einzelnen Variationen ("Was geschieht, wenn..."): Invarianzen erhärten die Vermutung, Varianzen liefern Gegenbeispiele.

   (e) Überprüfung der Vermutung an kontinuierlich veränderten Figuren (unvollständige Induktion): Kontinuierliche Bewegungsabläufe, hohe Rechengenauigkeit (variabel einstellbar!) zeigen (bei einer richtigen Aussage) die stets mögliche Durchführbarkeit derselben Handlung auf. Dadurch steigt der Gewißheitsgrad der Vermutung, wenn auch letztlich das Erfülltsein jeder Inzidenz von der internen Rechengenauigkeit abhängt. Dieser hohe Gewißheitsgrad bedeutet keine Schmälerung des Beweisbedürfnisses. Im Gegenteil! Durch ihn wird die Neugier geweckt, welche Ursachen hinter der Vermutung stecken. Beweisen bedeutet nicht nur eine Gewißheitssicherung, sondern eher ein Aufdecken der Ursachen im System.

   (f) Erklärung der Inzidenzen bzw. Paßvorgänge durch Nennen von bewiesenen Sätzen bzw. Annahmen. Insgesamt ergibt sich ein Beweis in einer Bildhandlungssprache.

   Damit: Diese Art von experimenteller Geometrie birgt nicht die Gefahr eines Rückfalls vor Euklid in sich, sie kann sogar eine Hinführung bewirken, wenn auch "nur" auf einer figurengebundenen Handlungssprache.

3. Zwei Beispiele

   (a) Entdeckung der Zahl π - Berechnung des Kreisumfanges:
   Einem Kreis wird als Näherung für den Kreisumfang ein Achteck ein- und umgeschrieben. Im Rechenmodus kann die Länge der entsprechenden Seite durch Anklicken übernommen und durch Multiplikation mit 8 die angenäherten Umfänge bestimmt werden. Die einzige Größe, die vom Kreis durch

Abmessen bestimmt werden kann, ist der Durchmesser (ebenfalls durch Anklicken). Um die Frage zu beantworten, in welcher Relation der Durchmesser zum Umfang steht, prüft man die Zahlen $U \pm d, U \cdot d, U/d$ auf Invarianz gegenüber kontinuierlichen Veränderungen des Kreisdurchmessers, in einem Meßfenster können die laufend aktualisierten Meß- und Rechendaten beobachtet werden. Man stellt die Invarianz des Quotienten (Aussagenfindung durch **Generalisieren eines Kreispunktes**) fest. Analoges beobachtet man beim 16- und 32-Eck , ebenso das Zusammenziehen der Quotienten auf 3,14. Durch Zoomen können die immer kleiner werdenden Seiten exakter angeklickt werden, Erhöhen der Dezimalstellenanzahl bekräftigt die Invarianzbeobachtung. Aus dem 8-, 16- und 32-Eck schließt man auf die Konstanz von $U/d = 3,141$ im Kreis (Aussagenfindung durch **unvollständige Induktion**) (siehe [1]).

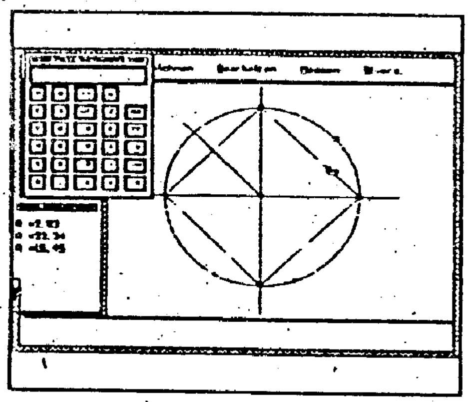

Abb. 1

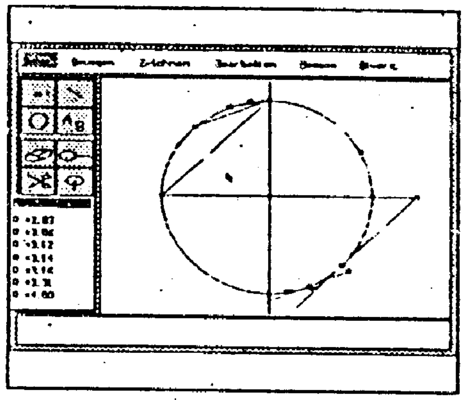

Abb. 2

(b) **Zum Satz von Pythagoras:**
Gegeben seien die Quadrate über den Seiten eines beliebigen Dreiecks:

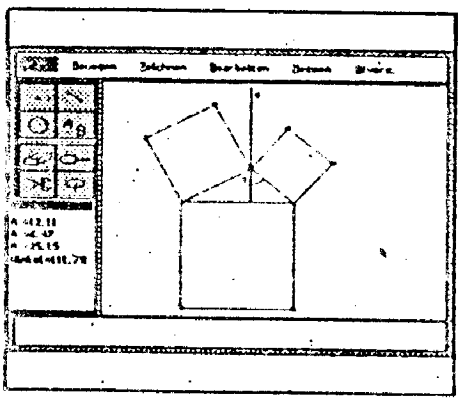

Abb. 3

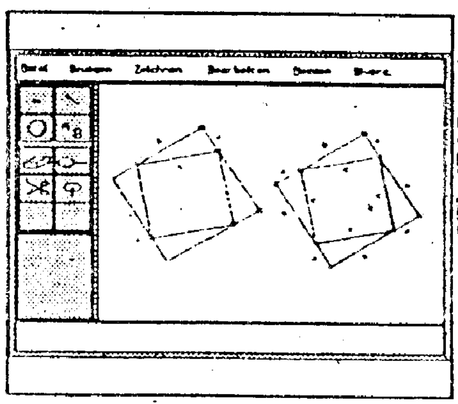

Abb. 4

Man läßt den Punkt P längs der Geraden wandern. Die Beobachtung, daß die Flächeninhalte der Kathetenquadrate größer und kleiner werden , kann numerisch unterstützt und die Invarianz der Summeneigenschaft $a^2 + b^2 = c^2$

bei 90° durch kontinuierliches Verändern des Dreiecks und Bewegen des Punktes P am Thaleskreis visuell und numerisch im Meßfenster beobachtet werden. Die Beweisfigur Abb. 4 zeigt die Ursachen dieses "Zufalls" auf: Man bewegt die beiden Dreiecke nach oben, die Deckung wird optisch durch das Auftreten einer Mischfarbe angezeigt. Das Passen selbst kann durch Angabe von Winkel- und Kongruenzsätzen begründet werden.

Zusammenfassung: FELIX ist ein interaktives Grafikpaket, das eine

- experimentelle Unterrichtsform
- Anwendung heuristischer Verfahren
- Vermittlung von Leitideen der Geometrie (Idee des Passens und der Kontinuität, Idee der Abbildung im Sinne eines funktionalen Denkens, siehe [2])
- Vermittlung höherer kognitiver (Analyse und Synthese), affektiver (Selbständigkeit, Neugier) aber auch psychomotorischer Lernziele (analytisches Sehen, Bedienung von Rechengeräten) gestattet.

Der Gefahr des Verlustes einer handwerklichen Geschicklichkeit im Konstruieren kann durch nachträgliches Anfertigen von Arbeitsblättern bzw. durch Freihandskizzen begegnet werden. Dafür kann die Effizienz von experimenteller Unterrichtsformen und heuristischer Verfahren durch eine Überwindung der Hemmnisschwelle und handwerklicher Unzulänglichkeiten gesteigert werden. Darüber hinaus dient die so experimentell wiederentdeckte und anschaulich begründete Geometrie als Grundlage für eine effiziente Visualisierung in der Mathematik schlechthin.

Literatur:

[1] Schumann, H.: Schulgeometrisches Konstruieren mit dem Computer. J.B. Metzler + B.G. Teubner, 1991.

[2] Bender, P.: Zentrale Ideen der Geometrie für den Unterricht der Sekundarstufe I. Beiträge zum MU, 1983.